关键词：数，分类，数轴，整数，整除，质数（素数），合数，奇数，偶数，应用

# 整除规则 Divisibility Rule

**定义Definition**

（**带余除法**）对于任意整数a和非零整数b，必有唯一一对整数（p，r），使得a=bp+r (0≤r＜b),其中p为商，r为余数，特别地，当r=0时，即a=bp,则称a被b整除，或称b整除a，记为b|a. 若r≠0，则称b不整除a，记为。描述了两个自然数之间的一种特殊关系。

**表示方法：**

b|a 表示b整除a，即a是b的倍数，b是a的约数（或因数）。如3|15

**整除规律**

被2，3,5整除规律.

被4,6，8,9,10,25，100，125整除规律

被7,11,12，13，17,19整除规律

**被7整除规律**：一个整数的个位数字截去，再从余下的数中，**减去**个位数的2倍，如果差是7的倍数。如果差太大或心算不易看出是否7的倍数，就需要继续上述「截尾、倍大、相减、验差」的过程，直到能清楚判断为止。例如，判断133是否7的倍数的过程如下：13－3×2＝7，所以133是7 的倍数；又例如判断6139是否7的倍数的过程如下：613－9×2＝595 ， 59－5×2＝49，所以6139是7的倍数，余类推。

**【例】请证明**

**被11整除规律**：若一个整数的奇位数字之和与偶位数字之和的差能被11整除（0,或11的倍数），则这个数能被11整除。11的倍数检验法也可用上述检查7的“割尾法”处理！过程唯一不同的是：**倍数不是2而是1**。

**【证明】设N=a0 + 10a1 + 100a2 + 1000a3 + …… = a0+10(a1+10a2+1000a3+……)**

**从N中减去11的倍数：11（a1+10a2+……），得到**

**M0=a0-a1-10(a2+10a3+……)**

**显然 M0除以11所得的余数=N除以11所得余数。**

**从M0加上11的倍数：11（a2+10a3+……）得到**

**M1=a0-a1+a2+10(a3+……)**

**再从M1减去11的倍数：11（a3+……） 得到**

**M2=a0-a1+a2-a3+……**

**依次类推，得到：**

**M=a0-a1+a2-a3+……=(a0+a2+a4+…)-(a1+a3+a5+…)**

**这个数M除以11所得余数=N除以11所得余数。**

**【举例】87635064能被11整除吗？**

**奇数位数字之和=4+0+3+7=14**

**偶数位数字之和=6+5+6+8=25，**

**两者之差=25-14=11**

**所以 能被11整除。**

**被19整除规律**：若一个整数的个位数字截去，再从余下的数中，加上个位数的2倍，如果差是19的倍数，则原数能被19整除。如果差太大或心算不易看出是否19的倍数，就需要继续上述「截尾、倍大、相加、验差」的过程，直到能清楚判断为止。

**【证明】任何数N都可以用十进制表示为**

**N = 10x+y （x,y是整数， 0≤y<10）**

**我们要证明的是：19 | N 充要条件 19|N’=x+2y**

**10N’-N =10(x+2y)-(10x+y)=19y**

**所以 N=10N’-19y**

**所以 19|N 等价 19|（10N’-19y）等价19|10N’等价19|N’**

**【举例】判断47045881是否可以被19整除？**

**4 7 0 4 5 8 8|1**

**2**

**4 7 0 4 5|9 0**

**1 8**

**4 7 0 6|3**

**6**

**4 7 1|2**

**4**

**4 7|5**

**1 0**

**5|7**

**1 4**

**1 9**

**显然19|19，还可以依次推出57,475,4712,47063,470459,4704590，47045881也都是19的倍数。**

**整除基本性质**（以下a,b,c都是整数）

**性质1**.如果c|a, c|b，那么c|（a±b）；推广至一般:若a|bi,则a|，其中ci∈Z,i=1,2,…,n [推广到**同余定理**：如果a、b除以c，余数相同，则c|(a-b)]

**性质2**.如果n是非零整数，（1）若b|a，则nb|na；（2）若nb|na，则b|a；

**性质3**.如果c|b，b|a那么c|a；

**性质4**.如果a有一个小于的约数c，则必有一个大于的约数d.

**证明** 因为c是a的约数，因此，就有a＝cd，

又c＜，则

a＝cd＜d，即 d＞.

这表明a的约数（除外），可以成对出现。

性质4给出了判别一个数是否为质数的方法（通常称为**筛法**）：

判别n是否为质数，仅需判别≤的质数是否为n的约数. 如果这些质数（≤）均不是n的约数，就说明n是质数。

**概念：质数和合数**

**整数的素因数分解**

**性质5 算术基本定理（也叫唯一分解定理）**

任一整数n>1,可以分解成： n =  ， k ≥1

其中 p1,p2,…,pk是互不相同的质数，a1,a2,…,ak是正整数，而且在不考虑p1,p2,…,pk的顺序时，这样的分解只有一种。

这个定理在数论中有着广泛的应用，其实在小学阶段学的分解质因数，就是采用的这一算术基本定理。

**求正约数个数的推论：**求大于1的正整数n的正约数个数的一般方法如下：

先将n分解成 n = ，（p1<p2<…<pk为质数，a1,a2,…,ak是非负整数），则n的正约数个数为：d（n）=（a1+1）(a2+1)…（ak+1）=

正约数包括了1。

所有约数的和为S（n）=

**性质6** 任一整数n可以写为，j为奇数.

**最大公约数与最小公倍数**

如果d|a，d|b，那么称d是a、b的公约数，公约数中最大的数叫做**最大公约数**greatest common divisor(GCD)，记为（a，b），如（3，5）＝1，（8，108）＝4.

如果a|c，b|c，那么称c是a与b的公倍数。公倍数中最小的数叫做Least Common Multiple，缩写L.C.M，记作[a，b]。

如 [3，5]＝15，[8，108]＝216。

**重要性质**：gcd(a,b)=gcd(b,a), gcd(-a,b)=gcd(a,b), gcd(a,a)=|a|, gcd(a,0)=|a|, gcd(a,1)=1, gcd(a,b)=gcd(b, a mod b), gcd(a,b)=gcd(b,a-b)

Gcd(ma,mb)=m\*gcd(a,b), gcd(a+mb,b)=gcd(a,b), m是自然数

Gcd(a/m,b/m)=gcd(a,b)/m, 此处m=gcd(a,b)

Gcd(ab,m)=gcd(a,m)\*gcd(b,m)

Gcd(a,b)\*Lcm(a,b)=ab

Gcd(a,lcm(b,c))=lcm(gcd(a,b),gcd(a,c))

Lcm(a,gcd(b,c))=gcd(lcm(a,b),lcm(a,c))

在坐标系里，将点（0,0）和(a,b)连起来，通过整数坐标的点的数目（除了（0,0）一点外）就是gcd（a，b）

**性质7** a与b两个数的最小公倍数能整数这两个数的任一公倍数。

**证明** 设，则（否则与d的最大性矛盾）。于是，

令c为a的任一公倍数，则a|c，b|c，所以，

，

即 [a，b]|c.

**性质8** 若a、b是正整数，则（a，b）[a，b]＝ab [gcd(a,b)\*lcm(a,b)=ab]

由性质5易得性质8.

**性质9** 设a＞b＞0，且a＝bq＋r，0＜r＜b，其中q，r是正整数，那么

（a，b）＝（b，r）.

**证明** 设（a，b）＝d，则d|a，d|b，于是由性质3得d|(a－bq)，即

d|r.

从而 （b，r）≥d，即（b，r）≥（a，b）.

另一方面设（b，r）＝c，则c|b，c|r,于是也由性质3得

c|(bq＋r)，

即 c|a.

从而 （a，b）≥c，即（a，b）≥（b，r）.

因此，（a，b）＝（b，r）.

性质9给出了求最大公约数的一种方法，即**辗转相除法**。【求最大公约数的方法，利用了性质gcd(a,b)=gcd(b,a mod b)】

**辗转相除法**：设0＜b＜a，如果

， 0≤＜，

， 0≤＜，

， 0≤＜，

……

，0≤＜.

如此下去，必有，使得

，

且 （a，b）＝.

**性质10** 若a、b是整数，b＞0，则有且仅有一对整数q，r，使得

a＝bq＋r， 0≤r＜b.

**证明** 因为b＞0，则b的倍数可以是

…，－3b，－2b，－b，0，b，2b，3b，….

当a是b的倍数时，r＝0，即存在一对整数q，r，使得a＝bq＋0.

当a不是b的倍数时，则比存在整数q，使得

qb＜a＜(q＋1)b.

即有一对整数q，r，使得

a＝qb＋r. 0＜r＜b.

故存在一对整数q，r，使得a＝qb＋r，0≤r＜b ①

再证明只有唯一的一对q，r满足a＝qb＋r.

假设有一对，，使得a＝，0≤＜b ②

那么

，

于是 ，

而 

由此推得 ，即 ，

从而 

**性质11**

（1）如果c|ab，且(c，a)＝1，那么c|b；

（2）如果a|c，b|c，(a，b)＝1，那么ab|c；

（3）如果a|c，b|c，那么[a，b]|c.

（4）若a|b, 则|a|≤|b|，因此，若a|b, 有b|a，则a=±b

（5） p为质数，若p|a1a2……an, 则p必能整除a1,a2,…an中的某一个。特别地，若p为质数，p|an, 则p|a。

（6）n个连续整数中有且只有一个是n的倍数。

（7）任何n个连续整数之积一定是n的倍数。

**进位制**

**性质12** 任何一个正整数都可以写为如下形式

，

n≥0，0≤＜g，g＞1.

利用性质12，我们可以得到一个数能被3、9、4、25、11等整除的判别法.

# 例题

1、若a、b都是正整数，且a除以5余2，b除以5余3，则a2+4b除以5，得到的余数是（ ）

A、1 B、2 C、3 D、4

【解】特殊取a=7，b=8，则a2+4b=49+32=81，除以5余1. 选择A。

或者 a=5k+2,b=5m+3, 则a2+4b=25k2+20k+4+20m+12=25k2+20(k+m)+15+1, 除以5余1.

**今有物，不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物至少有几何？ [韩信点兵,兵不知其数]**

此题出自《孙子算经》，是著名的“孙子问题”，也称“鬼谷算”，“剪管术”等，这个题目的答案是\_\_\_\_\_

【解】中国剩余定理：这个数减去2，能被3和7整除，且被5除余1，

1. 被3、7整除的最小数就是3x7=21，而21被5除正好余1. 或
2. 加上2就是23,23被5除，正好余3，

所以23为所求数。

明朝数学家程大位把这一解法编成四句歌诀：

**三人同行七十（70）稀，**

**五树梅花廿一（21）枝，**

**七子团圆正月半（15），**

**除百零五（105）便得知。**

歌诀中每一句话都是一步解法：第一句指除以3的余数用70去乘；第二句指除以5的余数用21去乘；第三句指除以7的余数用15去乘；第四句指上面乘得的三个积相加的和如超过105，就减去105的倍数，就得到答案了。即：

70×2＋21×3＋15×2－105×2=23

**如果没有“至少”，则最终结果应该为 [3,5,7]\*n+23, n为自然数,n用来调整结果所在区域范围。 (233+105t,128+105n,23+105m)**

2、如果四个互不相同的整数m，n，p，q满足（9+m）（9+n）（9+p）（9+q）=9，那么m+n+p+q=

【解】9只能写成1\*（-1）\*（-3）\*3这样的4个不同的整数的乘积。

故可以假定9+m=1, 9+n=-1, 9+p=3, 9+q=-3, 求和为36+（m+n+p+q）=0

m+n+p+q=-36

3、在100以内同时被2,3,5整除的正整数有多少个？1000以内同时被3,4,5,6整除的正整数个数？

【解】同时被2,3,5整除，因为（2,3,5）=1，[2,3,5]=30所以就是求被30整除的数，100/30=3…10, 所以有3个，分别是30,60,90.

同理，因为（3,4,5,6）=1,[3,4,5,6]=60, 所以即求能被60整除的数个数。1000/60=16…40。 所以有16个数。

4、证明：形如的六位数一定被7,11,13整除。

【解】因为 

其中**1001 = 7×11×13**, 故这个六位数能被7,11,13整除.

5、设五位数 被72整除，求数字x和y。

【解】72=8x9，故能被8和9整除。

**能被8整除，说明末尾3位能被8整除，**试除一下，得到y=2才能满足。

又能被9整除，说明各位数字之和能是9的倍数，即x+6+7+9+2=x+24能被9整除，这里0<x≤9,所以 x=3.

6、令N= 19991999……1999, （1999个1999连写）求N被11除，所得的余数

【解】首先了解到被11整除的规则是：奇数位数字和与偶数位数字和之差能被11整除，则这个数能被11整除。

该题中，N的奇数位数字和显然为（9+9）x1999，偶数位数字和为（1+9）x1999，

它们的差=1999x8，除以11，所得的余数为9，故N除以11，所得余数为9.

证明：令N-9 = 19991999……1990，显然N-9的奇数位数字之和减去偶数位数字之和等于1999x8-9=15992-9=15983=1453x11，能被11整除，故N-9也能被11整除。所以 N除以11所得余数就是9.

【重点】**一个整数，被3或9除，所得的余数等于这个数的数字和除以3或9所得的余数。**

**一个整数，被11除，所得的余数等于这个数的奇数位数字和减去偶数位数字和的差除以11所得的余数。**

7、有200多本书，如果7本7本的搬，则余5本，如果9本9本的搬，则少2本，问有多少本书？

【解】如果我们增加2本书，则7本7本搬，刚好能够搬完，同样9本9本搬也刚好能搬完。说明书本数+2能够被7和9整除。 而7和9互质，故书本数+2是63=7\*9的倍数，所以书本数=63k-2（k为整数），已知是200多本，所以k可取4，书本数为250.

8、给你0，4，5，6，7可以组成几个没有重复数字且能被4整除的三位数？

【解】4的倍数特征是后两位数是4的倍数，因此后两位需要是：40，60，04，64，56，76。

后两位是40，这样的三位数是540，640，740；

后两位是60，这样的三位数是460，560，760；

后两位是04，这样的三位数是504，604，704；

后两位是64，这样的三位数是564，764；

后两位是56，这样的三位数是456，756；

后两位是76，这样的三位数是476，576。

这样的三位数共有15个。 （=6x3-3）

9、能同时被2、3、5整除的最大四位数是( ),把它分解质因数是( )

【解】 10000/30=333…10, 所以最大四位数为333x30=9990=2x3x5x3x3x37

10、整数2012能被多少个不同的自然数整除？

【解】先熟悉几个与我们所处年代接近的质数年：1993，1997，1999，2003，2011，2017，2027，2029是质数。

本题就是求2012有多少个约数。2012 分解质因数得到：2x2x503=22x5031

所以2012的不同约数个数为（2+1）x（1+1）=6.

11、有多少个自然数除200，余数为8？

【解】设n为满足题意的自然数，则存在一个数p，使得200=np+8 （n>8）

所以 np=192, 因此n应该是192的约数，原问题转化为求192的大于8的约数的个数。

因为 192 = 26X3，所以192的约数个数为（6+1）x（1+1）=14个。

另外n>8, 故小于8的约数：1,2,3,4,6，8不符合要求，故符合题意的自然数共有14-6=8个。

**证明题**

12、已知，，求证

证明：由已知：使，

 





**13、**设2不整除，求证

证明：因为2不整除，所以存在唯一一对，使，其中

， 

**14、**设，求证是奇数的平方

证明：



肯定一奇一偶肯定为偶数

肯定为奇数

**练习题 姓名： 得分：**

1. 一个六位数被88整除，求a与b的值。
2. 当x，y是什么数字是，四位数同时被2、3、4、5、6、9整除。
3. 求360的所有正约数的个数。
4. 有多少个自然数除732，余数为12？
5. 有个三位数，减去7后能被7整除，减去8后能被8整除，减去9后，能被9整除，求这个三位数。
6. 有个二位数，被3除余1，被4除余1，被5除也余1，求这个二位数。
7. 求200以内既不能被3整除，也不能被4整除的正整数个数。
8. 如果92、118、157被正整数n（n≠1）除，所得的余数都相同，那么n应为多少？
9. 如果67、88、116被正整数n（n≠1）除，所得的余数都相等，那么这个余数是多少？
10. 120的正约数共有多少个？这些正约数的和为多少？
11. 从5、6、7、8、9这五个数中，选出四个数字组成一个四位数，它被3、5、7整除，在所有符合条件的四位数中，最大的一个是多少？

魔鬼数字666

中国人喜欢66，六六大顺嘛。但是对于数字666，这是大家都看到的，酒店的编号类似666、999、888之类的最讨人喜欢。不过西方很多人对这个数字确实相当的厌恶，他们认为这是一个魔鬼数字。主要是受宗教的影响，“6”被视为大凶数。

“666这数字转换成罗马数字, 将会变成: I =1 ，V =5 ，X = 10 ，L = 50 ，C =100 ，D = 500 ，M = 1000 ，VICARIUS = 5+1+100+1+5( the U in Roman

letter is V) ，FILII = 50+3 ，DEI = 500+1 ，total =5+1+100+1+5+50+3+500+1 = 666 。在拉丁文中, ‘VICARIUS FILII DEI’这个字有写在教宗的帽子上, 源起于天主教. 法国人的说法是"‘the one who in this world wants to play God’， 也就是在这世界上却想扮演上帝角色的人, 就是指撒旦。在启示录13:18节中有这样的描述，指出反基督教的人具有一个特殊的数码，恶魔撒旦的代表符号就是666。”所以在基督教中6代表混沌不堪。

英语习语 at sixes and sevens 乱七八糟；糊涂的，迷茫的。

Six penny 不值钱，six of one and half a dozen of the other 半斤八两，差不多。

首先，666=1+2+3+4+……+36。36又刚好是62。  
      666=1+2+3+4+567+89  
         =123+456+78+9  
         =9+87+6+543+21  
      666=22 + 32 + 52 + 72 + 112 + 132 + 172这不是一个简单的平方和，你应该可以看到，这是前7个素数的平方和。而7这个数字，又是一个很有名的数字。  
      666=13 + 23 + 33 + 43 + 53 + 63 + 53 + 43 + 33 + 23 + 13上面的立方和足以让你惊奇，最大的那个数字刚好又是6。

10！=1×2×3×4×5×6×7×8×9×10=3628800，而这，刚好是六个星期的秒数。又是6。

**一个关于因子个数的有趣结论**

任意取一个数，比如14；  
写出此数所有的因数：1，2，7，14；

写出每一个因数的因数个数：1，2，2，4；

那么必然有：(1+2+2+4)²=1³+2³+2³+4³。  
再来举一例子：比如18.  
所有的因数为1，2，3，6，9，18  
因数的因数个数为，1，2，2，4，3，6  
那么必然有：(1+2+2+4+3+6)²=1³+2³+2³+4³+3³+6³。

所以说，如果有人要你写出一个式子，几个数的和的平方等于这几个数的立方和的话，随便就可以写出来。这个规律也就告诉我们，对于任意一个数，写出其每一个因数(也叫约数)的因数个数，那么这些数字的和的平方等于其立方和。

这不由得让我们想起另外一个公式：  
      (1+2+3+……+n)²=1³+2³+3³+……+n³，

那么这两个公式之间有什么关系呢？有的，其实这两个实在就是一个东西。

**证明如下：**

**当n为1的时候，显然成立  
      现在设自然数n满足关系式，只要能够证明对于n的一个非约数p，npm仍然满足上述关系，那么这个结论就得到了证明。我们首先需要看下面的定理：  
      如果设F(n)为n的约数的约数个数，那么有下面的关系：  
      当n为素数时，F(n)=2；  
      当n和m互质时，F(nm)=F(n)F(m)。…………②  
      这个问题，咱们可以运用数论的最基本的方法就可以得到，在此忽略。  
      如果说n的约数的约数的个数分别是a1，a2，...，an。并且满足  
      (a1+a2+a3+...+an)²=a1³+a2³+a3³+...+an³=x²。这个x为赋予的一个数值。  
      那么对于npm，利用式子②，a1对应着就变成了a1×1，a2就变成了a2×2……  
      左边=(x+x\*2+x\*3+...+x\*m)2  
      右边=x2+x2\*13+x2\*23+...+x2\*m3  
      要证明左边=右边，即证明(1+2+3+...+m)2=13+23+...+m3，显然，这个式子就刚好是式子①，这是显然成立的，于是定理得证。**

**剩余定理通用解法揭秘**

**例1：一个数被3除余1，被4除余2，被5除余4，这个数最小是几？**

题中3、4、5三个数两两互质。

则〔4，5〕=20；〔3，5〕=15；〔3，4〕=12；〔3，4，5〕=60。

为了使20被3除余1，用20×2=40；

使15被4除余1，用15×3=45；

使12被5除余1，用12×3=36。

然后，40×1＋45×2＋36×4=274，

因为，274>60，所以，274－60×4=34，就是所求的数。

**例2：一个数被3除余2，被7除余4，被8除余5，这个数最小是几？**

题中3、7、8三个数两两互质。

则〔7，8〕=56；〔3，8〕=24；〔3，7〕=21；〔3，7，8〕=168。

为了使56被3除余1，用56×2=112；

使24被7除余1，用24×5=120。

使21被8除余1，用21×5=105；

然后，112×2＋120×4＋105×5=1229，

因为，1229>168，所以，1229－168×7=53，就是所求的数。

**例3：一个数除以5余4，除以8余3，除以11余2，求满足条件的最小的自然数。**

题中5、8、11三个数两两互质。

则〔8，11〕=88；〔5，11〕=55；〔5，8〕=40；〔5，8，11〕=440。

为了使88被5除余1，用88×2=176；

使55被8除余1，用55×7=385；

使40被11除余1，用40×8=320。

然后，176×4＋385×3＋320×2=2499，

因为，2499>440，所以，2499－440×5=299，就是所求的数。

**例4：有一个年级的同学，每9人一排多5人，每7人一排多1人，每5人一排多2人，问这个年级至少有多少人？**

题中9、7、5三个数两两互质。

则〔7，5〕=35；〔9，5〕=45；〔9，7〕=63；〔9，7，5〕=315。

为了使35被9除余1，用35×8=280；

使45被7除余1，用45×5=225；

使63被5除余1，用63×2=126。

然后，280×5＋225×1＋126×2=1877，

因为，1877>315，所以，1877－315×5=302，就是所求的数。

**例5：有一个年级的同学，每9人一排多6人，每7人一排多2人，每5人一排多3人，问这个年级至少有多少人？**

题中9、7、5三个数两两互质。

则〔7，5〕=35；〔9，5〕=45；〔9，7〕=63；〔9，7，5〕=315。

为了使35被9除余1，用35×8=280；

使45被7除余1，用45×5=225；

使63被5除余1，用63×2=126。

然后，280×6＋225×2＋126×3=2508，

因为，2508>315，所以，2508－315×7=303，就是所求的数。

（例5与例4的除数相同，那么各个余数要乘的“数”也分别相同，所不同的就是最后两步。）

一个数被3除余2，被7除余4，被8除余5，这个数最小是几？在1000内符合这样条件的数有几个？ （答案：53， （1000-53）/[3,7,8]=947/168=5…107, 6个）